# Trigonometrie

Geometrie Klasse 9

1 Sinus, Kosinus und Tangens
2 Dreiecksberechnungen ❶
3 Dreiecksberechnungen ❷
4 Besondere Sinus Werte
5 sin und cos im Einheitskreis
6 Tangens am Einheitskreis
7 Der Sinussatz
8 Der Kosinussatz

Geometrie 9

$$\text{Sinus} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\text{Kosinus} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\text{Tangens} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\sin 40° = \cos 50°$$

$$\sin \alpha = \cos (90° - \alpha)$$

$$\frac{\text{Seite1}}{\text{Seite2}} = \frac{\sin(\text{Gegenwinkel1})}{\sin(\text{Gegenwinkel2})}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

Trigonometrie

# 1 Sinus, Kosinus & Tangens

## *Trigonometrie*

**Rechtwinklige Dreiecke** mit gleich großen spitzen Winkeln sind *ähnlich* zueinander. Die entsprechenden Seitenverhältnisse sind daher immer gleich. Die Winkelfunktionen Sinus, Kosinus und Tangens ordnen jedem spitzen Winkel ein entsprechendes Seitenverhältnis zu.

**Sinus** $= \dfrac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Hypotenuse}}$

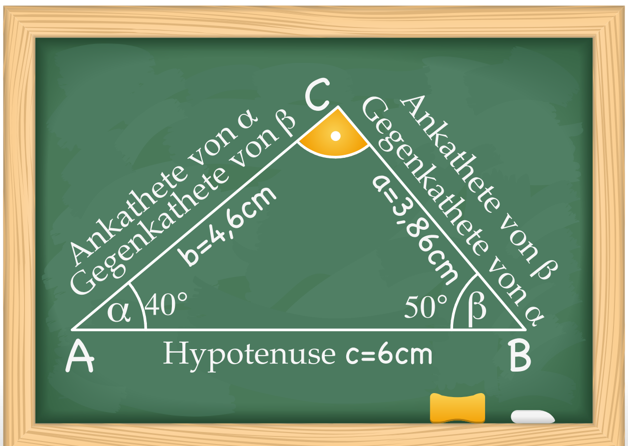
$\sin 40° = \dfrac{a}{c} = \dfrac{3{,}86}{6} \approx 0{,}64$

**Kosinus** $= \dfrac{\textit{Ankathete}}{\textit{Hypotenuse}}$

$\cos 40° = \dfrac{b}{c} = \dfrac{4{,}6}{6} \approx 0{,}77$

**Tangens** $= \dfrac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Ankathete}}$

$\tan 40° = \dfrac{a}{b} = \dfrac{3{,}86}{4{,}6} \approx 0{,}84$




$\sin 40° = \cos 50°$

$\sin \alpha = \cos (90° - \alpha)$

Geometrie 9

Trigonometrie 1

# 2 Dreiecksberechnungen ❶

Trigonometrie

Mithilfe der Winkelfunktionen Sinus, Kosinus und Tangens lassen sich im **rechtwinkligen Dreieck** fehlende Größen berechnen.

## ❶ 1 Seite und 1 Winkel

**Bekannt sind b = 4,6cm und $\alpha = 40°$**

**β** $\alpha + \beta + 90° = 180° \rightarrow \quad \beta = 50°$

**c**

$$\cos 40° = \frac{b}{c} = \frac{4{,}6}{c} \quad | \cdot c$$
$$c \cdot \cos 40° = 4{,}6 \quad | : \cos 40°$$
$$c = 6\text{cm}$$

**a**

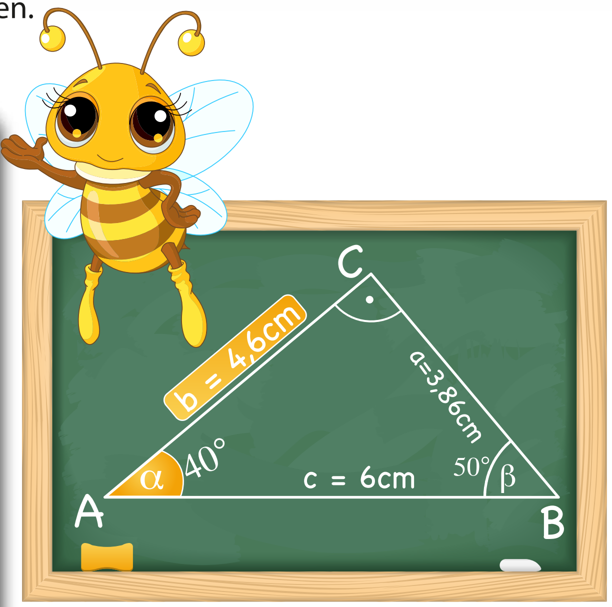
$$\tan 40° = \frac{a}{b} = \frac{a}{4{,}6} \quad | \cdot 4{,}6$$
$$4{,}6 \cdot \tan 40° = a \rightarrow \quad a \approx 3{,}9\text{cm}$$

oder

*Pythagoras:* $a^2 + b^2 = c^2$

**a**

$$a^2 + 4{,}6^2 = 6^2 \quad | - 4{,}6^2$$
$$a^2 = 14{,}84$$
$$a = \sqrt{14{,}84} \approx 3{,}9\text{cm}$$




Geometrie 9

Trigonometrie 2

# 3 Dreiecksberechnungen ❷

## Trigonometrie

Mithilfe der Winkelfunktionen Sinus, Kosinus und Tangens lassen sich im **rechtwinkligen Dreieck** fehlende Größen berechnen.

### ❷ 2 Seiten

**Bekannt sind b = 4,6cm und c = 6cm**

**α** $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{4{,}6}{6} = \frac{23}{30}$

$\rightarrow \boxed{\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{23}{30}\right)} \approx 40°$

**β** $\alpha + \beta + 90° = 180° \rightarrow \quad \beta \approx 50°$

**a** $\tan 40° = \frac{a}{b} = \frac{a}{4{,}6} \quad \Big| \cdot 4{,}6$

$4{,}6 \cdot \tan 40° = a \rightarrow \quad a \approx 3{,}9\text{cm}$

oder

*Pythagoras:* $a^2 + b^2 = c^2$

**a** $a^2 + 4{,}6^2 = 6^2 \quad \Big| -4{,}6^2$

$a^2 = 14{,}84$

$a = \sqrt{14{,}84} \approx 3{,}9\text{cm}$


Geometrie 9

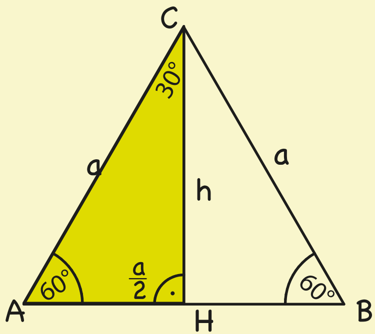
Trigonometrie 3

# Besondere Sinus-Werte



Mithilfe eines gleichseitigen Dreiecks und der Diagonalen im Quadrat lassen sich besondere Sinus- und Kosinus-Werte berechnen.

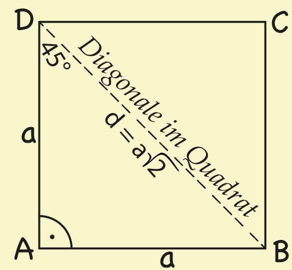
## 1 $\sin 30° = \frac{1}{2} = \cos 60°$




*Dreieck ABC ist gleichseitig*
*Dreieck AHC ist rechtwinklig*

$$\sin 30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2} : \frac{a}{1} = \frac{a \cdot 1}{2 \cdot a} = \frac{1}{2}$$

## 2 $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45°$



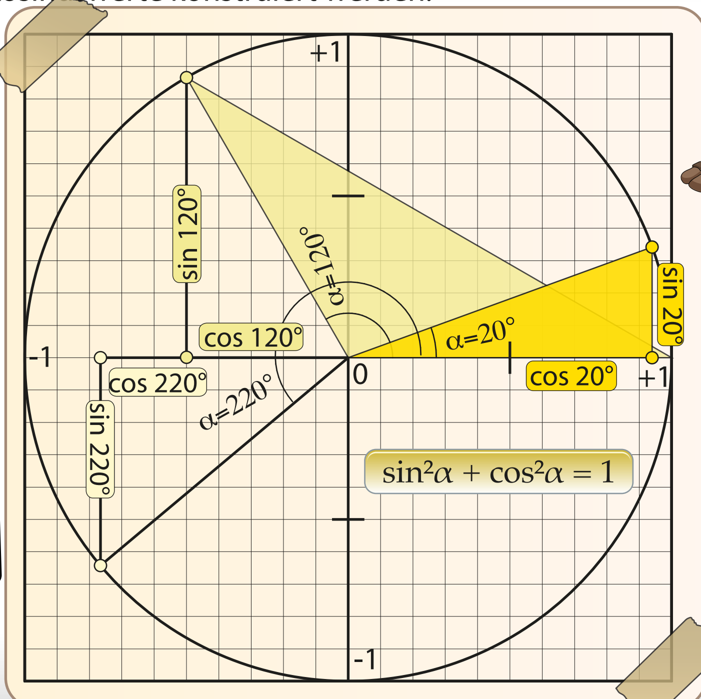

*Dreieck ABD ist rechtwinklig*

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$
$$d = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$
$$\sin 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

# 5 sin und cos im Einheitskreis

**Trigonometrie**

Im Einheitskreis (Radius 1) können die Sinus- und Kosinuswerte konstruiert werden.




**Sinus-Werte:**
Schritte in y-Richtung

**Kosinus-Werte:**
Schritte in x-Richtung

$\sin 20° \approx 0{,}35$
$\cos 20° \approx 0{,}93$

$\sin 120° \approx 0{,}86$
$\cos 120° = -0{,}5$

$\sin 220° \approx -0{,}64$
$\cos 220° = -0{,}77$

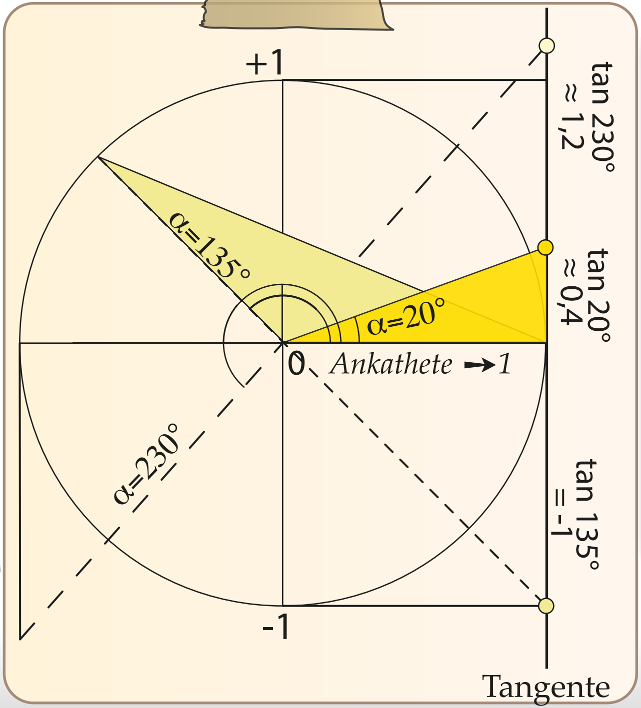
Geometrie 9

Trigonometrie 5

# 6 Tangens am Einheitskreis

Trigonometrie

Im Einheitskreis (Radius 1) können die Tangenswerte konstruiert werden.




## Konstruktion

Zeichne eine Tangente an den Einheitskreis bzw. eine Parallele zur y-Achse.
Die positive x-Achse ist der erste Schenkel des a-Winkels.
Zeichne den zweiten Schenkel des a-Winkels.
Verlängere den zweiten Schenkel, sodass er die Tangente schneidet.
Die y-Koordinate des Schnittpunktes ist der Tangenswert des Winkels.

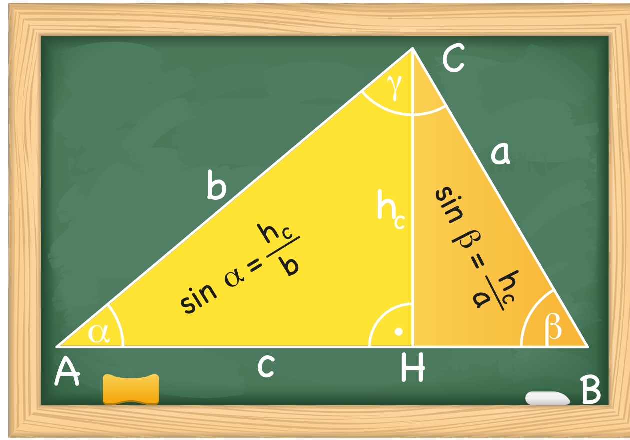
Geometrie 9

Trigonometrie 6

# Der Sinussatz

Mithilfe des *Sinussatzes* können in einem Dreieck die restlichen Seiten und Winkel berechnet werden, wenn man 2 Winkel und eine Seite, bzw. 2 Seiten und den Gegenwinkel der längeren Seite kennt.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{h_c}{b} : \frac{h_c}{a} = \frac{h_c \cdot a}{b \cdot h_c} = \frac{a}{b}$$




$$\frac{\text{Seite 1}}{\text{Seite 2}} = \frac{\sin(\text{Gegenwinkel1})}{\sin(\text{Gegenwinkel2})}$$

## Beispiel

$\alpha = 40°$; $\gamma = 80{,}4°$ und $c = 7\,\text{cm}$ $\rightarrow \beta = 180° - 40° - 80{,}4° = 59{,}6°$

$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$ $\rightarrow$ $\frac{a}{7} = \frac{\sin 40°}{\sin 80{,}4°} \,\Big|\cdot 7$ $\rightarrow$ $a = 7 \cdot (\sin 40°) : (\sin 80{,}4°) \approx 4{,}6\,\text{cm}$

$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$ $\rightarrow$ $\frac{b}{7} = \frac{\sin 59{,}6°}{\sin 80{,}4°} \,\Big|\cdot 7$ $\rightarrow$ $b = 7 \cdot (\sin 59{,}6°) : (\sin 80{,}4°) \approx 6{,}1\,\text{cm}$



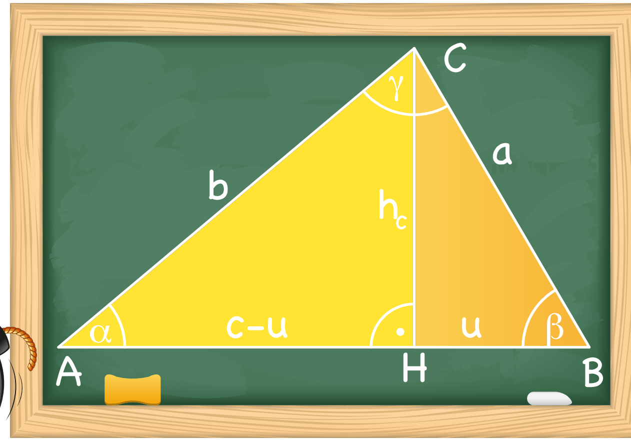
Trigonometrie 7

# Der Kosinussatz



Mithilfe des *Kosinussatzes* können in einem Dreieck die restlichen Seiten und Winkel berechnet werden, wenn man 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel, bzw. 3 Seiten kennt.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$$




## Beweis

$\cos\beta = \frac{u}{a} \rightsquigarrow u = a\cdot\cos\beta$ $\qquad$ $\sin\beta = \frac{h_c}{a} \rightsquigarrow h_c = a\cdot\sin\beta$

**Pythagoras für Dreieck AHC**

$$b^2 = (c-u)^2 + h_c^2 = c^2 - 2cu + u^2 + h_c^2 = c^2 - 2ca\cdot\cos\beta + u^2 + h_c^2$$
$$= c^2 - 2ac\cdot\cos\beta + a^2\cos^2\beta + h_c^2 = c^2 - 2ac\cdot\cos\beta + a^2\cos^2\beta + a^2\sin^2\beta$$
$$= c^2 - 2ac\cdot\cos\beta + a^2\cdot(\cos^2\beta + \sin^2\beta) = c^2 - 2ac\cdot\cos\beta + a^2\cdot 1$$



Trigonometrie

8