

Wachstum

1 Lineares / Exponentielles Wachstum 2 Formel für

exponentielles Wachstum 3 Formel für exponentielle

Abnahme 4 Logarithmus: Exponenten gesucht

Logarithmus

$$a^x = b \longleftrightarrow \log_a b = x$$

Exponent

Basis

Wachstumsformel

$$a \cdot b^x = y$$

Zeitintervalle

Endwert

Zu- Abnahme in %

Startwert

Zu- Abnahmefaktor

$$b = \left(\frac{100 \pm p\%}{100} \right)$$

$$\begin{aligned} \log_a a &= 1 \\ \log_a 1 &= 0 \\ \log_a (a^n) &= n \end{aligned}$$



Wachstumsarten

Lineares

pro Zeitintervall wird ein bestimmter Wert *hinzu*gezählt

⇒ **Beispiele:**

- ▶ eine Kerze brennt stündlich um 2cm ab
- ▶ die Handykosten vermehren sich pro Stunde um 3,50€

⇒ **Aufgabe:**

Tina erhält jährlich 5% Zinsen. Wie hoch ist ihr Kapital von 1500€ in 6 Jahren, wenn die Zinsen nicht mit verzinst werden?

$$5\% \text{ von } 1500\text{€} = \frac{5}{100} \cdot 1500 = 75\text{€ pro Jahr}$$

$$6 \cdot 75\text{€} = 450\text{€ für 6 Jahre}$$

$$\text{Kapital in 6 Jahren: } 1500\text{€} + 450\text{€} = 1950\text{€}$$

1	2	3	4	5	6
1575	1650	1725	1800	1875	1950

+75€ pro Jahr

Exponentielles

pro Zeitintervall wird der aktuelle Wert *vervielfacht* bzw. um einen *prozentualen Anteil vermehrt*

⇒ **Beispiele:**

- ▶ 12 Seerosen verdoppeln sich täglich
- ▶ pro Jahr verliert ein Auto 20% seines aktuellen Wertes

⇒ **Aufgabe:**

Tina erhält jährlich 5% mehr Taschengeld. Jetzt bekommt sie pro Monat 40€. Wie hoch ist ihr Taschengeld in 3 Jahren?

← NEUES Taschengeld →	
ALTES Taschengeld 40€	2€
100%	5%

$$105\% \text{ von } 40\text{€} = \frac{105}{100} \cdot 40 = 42\text{€}$$

0	1	2	3
40	42	44,10	46,31

· 1,05 pro Jahr

Wachstumsformel

$$a \cdot b^x = y$$

Startwert a , Wachstumsfaktor b , Zeitintervalle x , Endwert y , Zunahme in % p
 $b = \left(\frac{100 + p\%}{100} \right)$



➡ **Aufgabe:**

Tina legt 1500€ für 3 Jahre bei einem Zinssatz von 5% an. Wie hoch ist ihr Kapital nach den 3 Jahren, wenn die Zinsen mit verzinst werden?

	Neues Kapital 105%		
Jahr 1	Ausgangskapital 1500€ 100%	5% Zinsen 75€	$K_1 = 105\% \text{ von } 1500\text{€} = 1,05 \cdot 1500 = 1575\text{€}$
Jahr 2	Altes Kapital 1575€ 100%	5% Zinsen 78€	$K_2 = 1,05 \cdot 1575\text{€} = 1653,75\text{€}$
Jahr 3	Altes Kapital 1653€ 100%	5% Zinsen 83€	$K_3 = 1,05 \cdot 1653\text{€} = 1736,44\text{€}$ $K_3 = 1500 \cdot 1,05 \cdot 1,05 \cdot 1,05 = 1736,44\text{€}$

$$1500 \cdot 1,05^3 = K_3$$

Abnahmeformel

$$a \cdot b^x = y$$

Startwert a , Abnahmefaktor b , Zeitintervalle x , Endwert y , Abnahme in % $p\%$
 $b = \left(\frac{100 - p\%}{100} \right)$



⇒ **Aufgabe:**

Ein Computer hat einen Neupreis von 1500€. Pro Jahr verliert er 15% seines aktuellen Wertes. Wie viel ist er nach 3 Jahren noch wert?

	Aktueller Wert		
	100%		
Jahr 1	Neuer Wert 1275€ 85%	15% Verlust 225€	$W_1 = 85\% \text{ von } 1500\text{€} = 0,85 \cdot 1500 = 1275\text{€}$
Jahr 2	Neuer Wert 1084€ 85%	15% Verlust 191€	$W_2 = 85\% \text{ von } 1275\text{€} = 0,85 \cdot 1275 = 1084\text{€}$
Jahr 3	Neuer Wert 921€ 85%	15% Verlust 157€	$W_3 = 85\% \text{ von } 1084\text{€} = 0,85 \cdot 1084 = 921\text{€}$ $W_3 = 1500 \cdot 0,85 \cdot 0,85 \cdot 0,85 = 921,19\text{€}$

$$1500 \cdot 0,85^3 = W_3$$

Logarithmus: Exponenten gesucht

Logarithmus ist eine Schreibweise für (gesuchte) Exponenten:

$$a^x = b \longleftrightarrow \log_a b = x$$

Exponent Basis

— allgemein mit $a > 0$,
 $a \neq 1$ und $b > 0$:



⇒ **Beispiele:**

$$2^3 = 8 \longleftrightarrow \log_2 8 = 3 \text{ — Logarithmusgleichung}$$

spricht: der Logarithmus von 8 zur Basis 2 ist 3

$$5^x = 25 \longrightarrow x = 2 = \log_5 25$$

Zehnerlogarithmus:

$$\log_{10} 1000 = \lg 1000 = 3$$

allgemeingültige Logarithmen

1 $\log_a a = 1$, da $a^1 = a$

2 $\log_a 1 = 0$, da $a^0 = 1$

3 $\log_a (a^n) = n$, da $a^n = (a^n)$

4 $\log_a \left(\frac{1}{a^n}\right) = -n$, da $a^{-n} = \left(\frac{1}{a^n}\right)$

5 $\log_a \sqrt{a} = \frac{1}{2}$, da $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

siehe
Potenzen

