ÜBERSICHT

Körperberechnungen

Körperberechnungen

1 Prismaeigenschaften

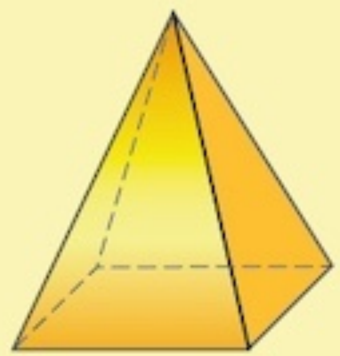
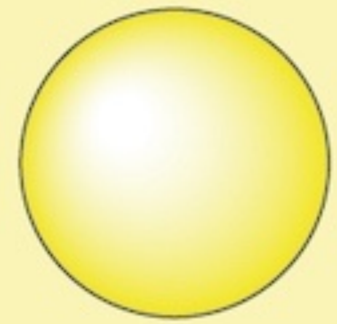
2 Rauminhalt vom Prisma

3 Zylinder: Rauminhalt & Oberfläche

4 Rauminhalt von Pyramide & Kegel

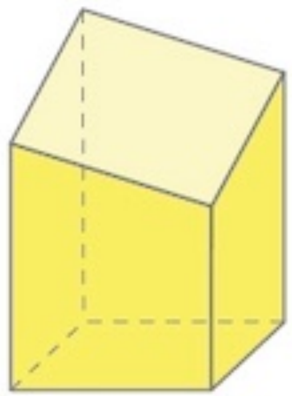
5 Oberfläche vom Kegel

6 Kugelvolumen & Oberfläche

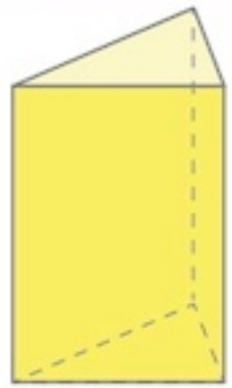
PRISMA	ZYLINDER	PYRAMIDE	KEGEL	KUGEL
				
$V = G \cdot h$	$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ $O = 2\pi r \cdot (r+h)$	$V = \frac{1}{3} G \cdot h$	$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$ $O = \pi \cdot r \cdot (r + s)$	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ $O = 4\pi \cdot r^2$

Ein Prisma besteht aus 2 parallelen und gleichen Grundflächen, die 3-, 4-, 5- … eckig sind. Die Seitenflächen sind Rechtecke.

kein Prisma



3-Eck
PRISMA

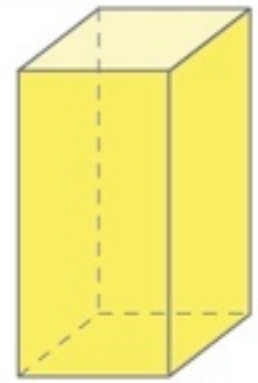


ZYLINDER

die Grundflächen sind Kreise

besonderes
PRISMA

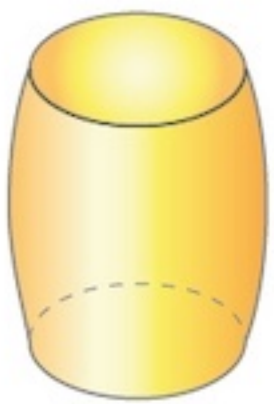
QUADER



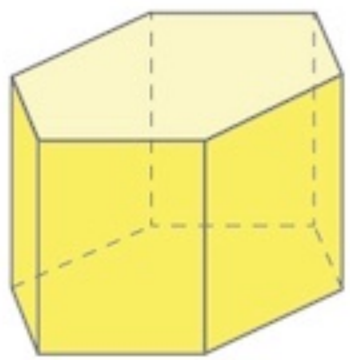
alle Flächen sind Rechtecke

besonderes
PRISMA

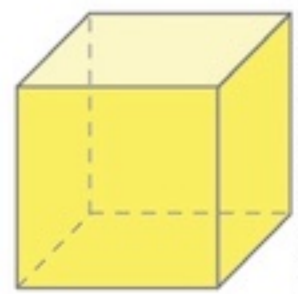
kein Prisma



6-Eck
PRISMA



WÜRFEL



alle Flächen sind Quadrate

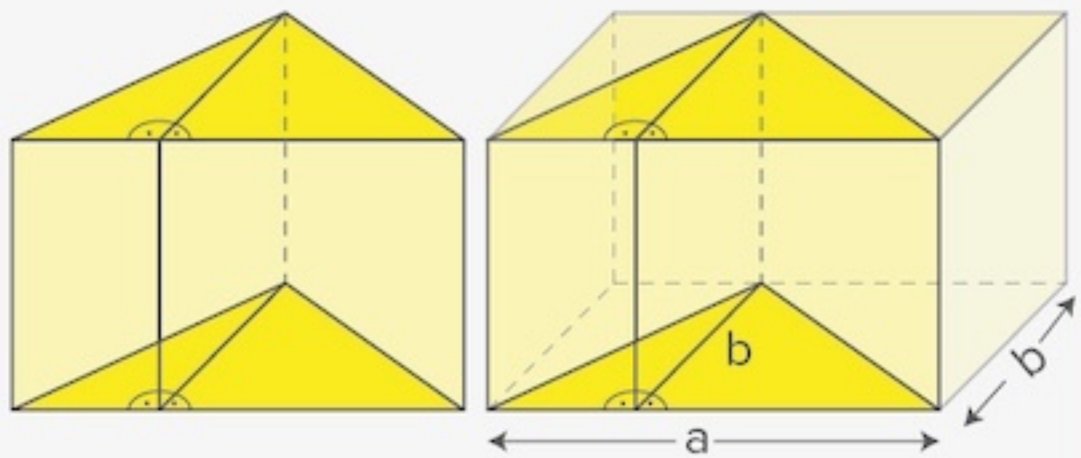
besonderes
PRISMA

2 Rauminhalt vom Prisma

Volumen

Ergänzung

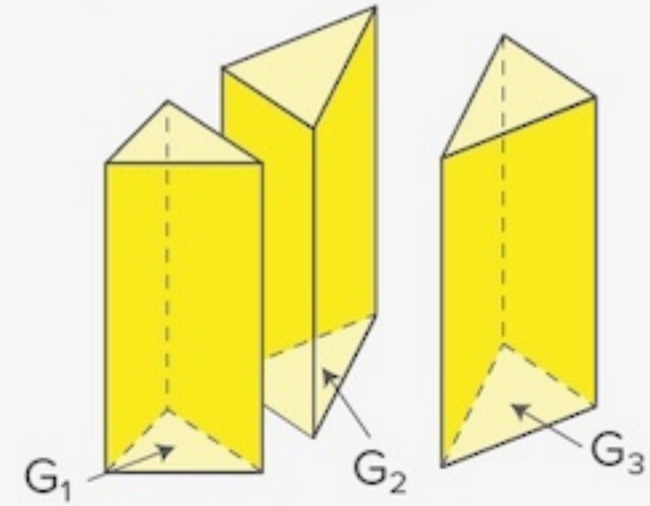
Ein Dreiecksprisma kann zu einem Quader ergänzt werden:



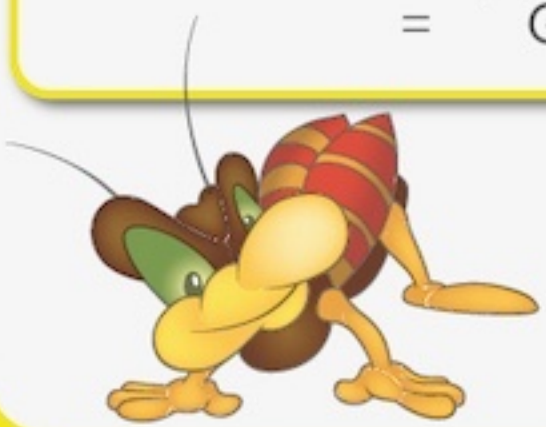
$$V = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot h$$
$$= (\tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b) \cdot h$$
$$= G \cdot h$$

Zerlegung

Jedes Prisma kann man in Dreiecksprismen zerlegen werden:



$$V = G_1 \cdot h + G_2 \cdot h + G_3 \cdot h$$
$$= (G_1 + G_2 + G_3) \cdot h$$
$$= G \cdot h$$



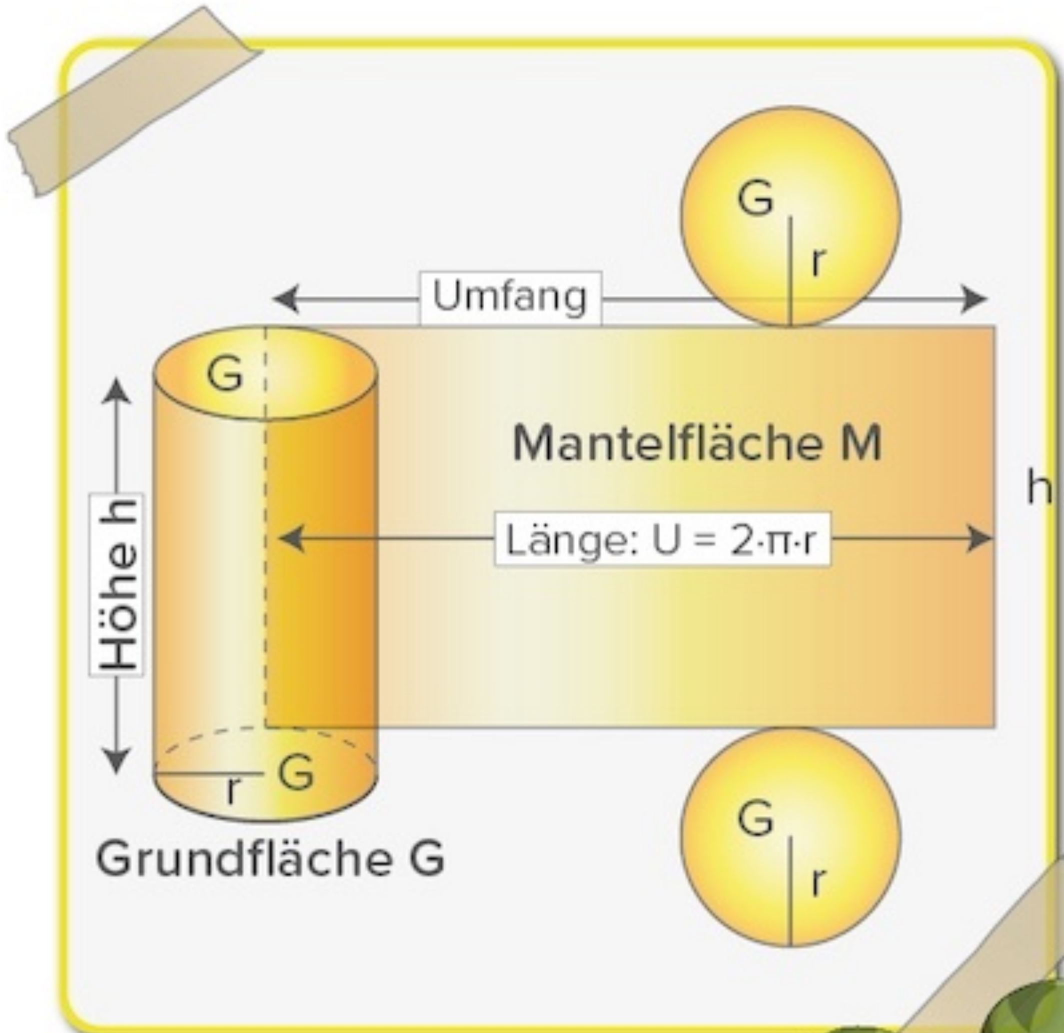
Grundfläche · Höhe

Formel:

$$V = G \cdot h$$

Zylinder: Rauminhalt & Oberfläche

Das Volumen eines Zylinders berechnet sich wie das des Prismas als Produkt aus Grundfläche und Höhe. Die Oberfläche setzt sich aus zwei Grundflächen und einer Mantelfläche zusammen.



RAUMINHALT

Grundfläche · Höhe

Formel:

$V = G \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$

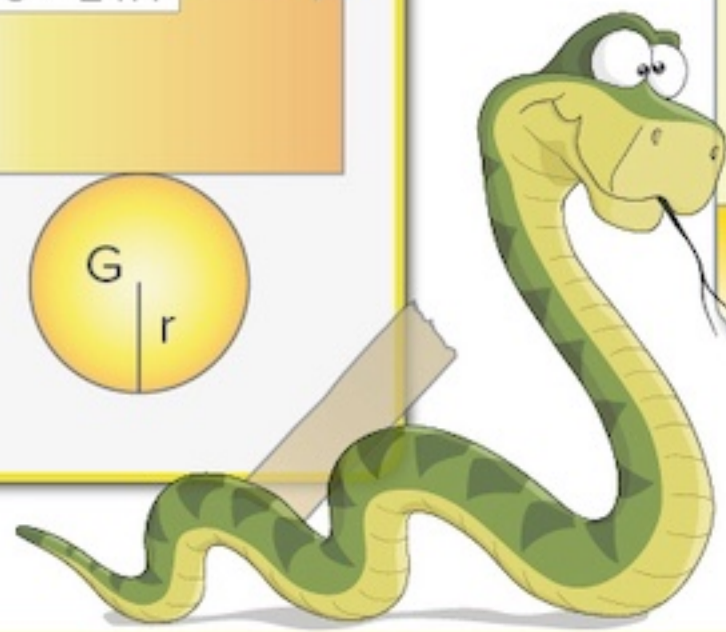
2·Grundfläche+Mantel

$2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2\pi r \cdot h$

Formel:

$O = 2\pi r \cdot (r + h)$

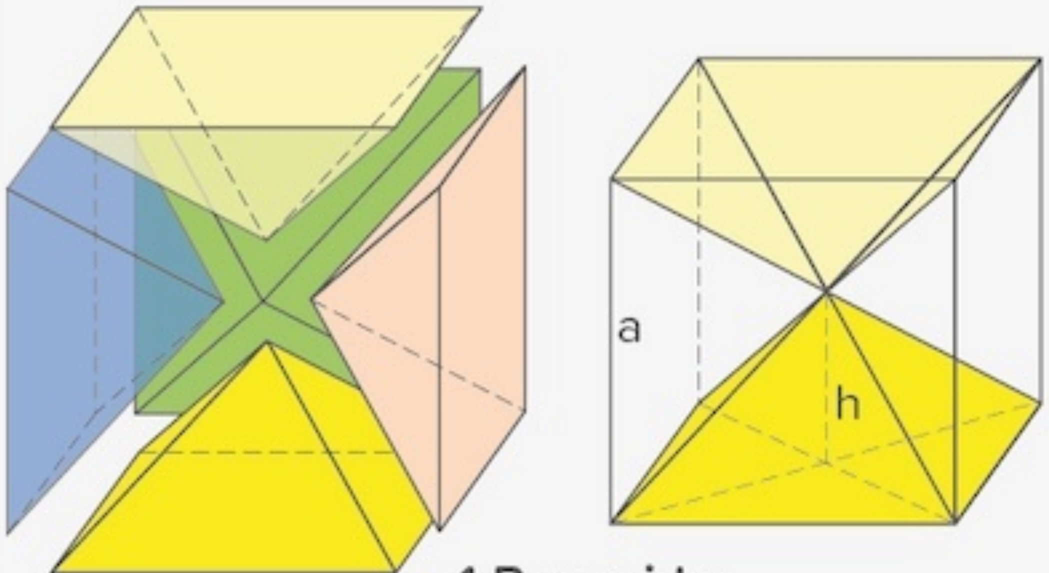
OBERFLÄCHE



Rauminhalt von Pyramide & Kegel

Pyramide

Ein Würfel kann in 6 gleiche quadratische Pyramiden aufgeteilt werden.



1 Pyramide:

$$V = \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a\cdot a^2 = \frac{1}{3}\cdot h\cdot G$$

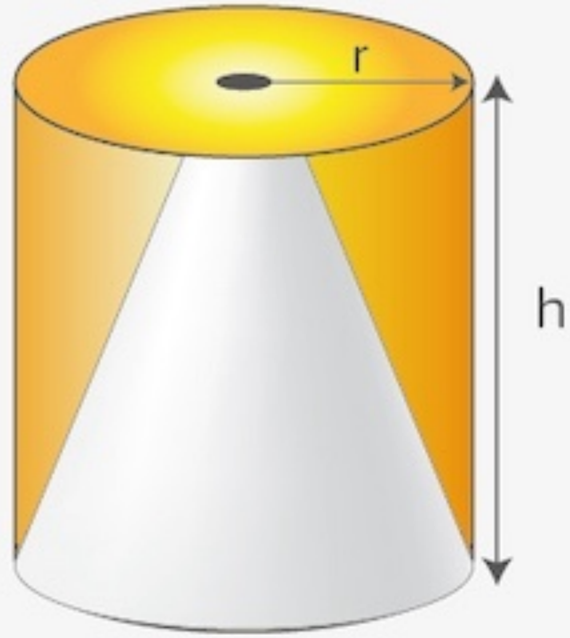
⅓·Grundfläche·Höhe

Formel:

$V = ⅓ \cdot G \cdot h$

Kegel

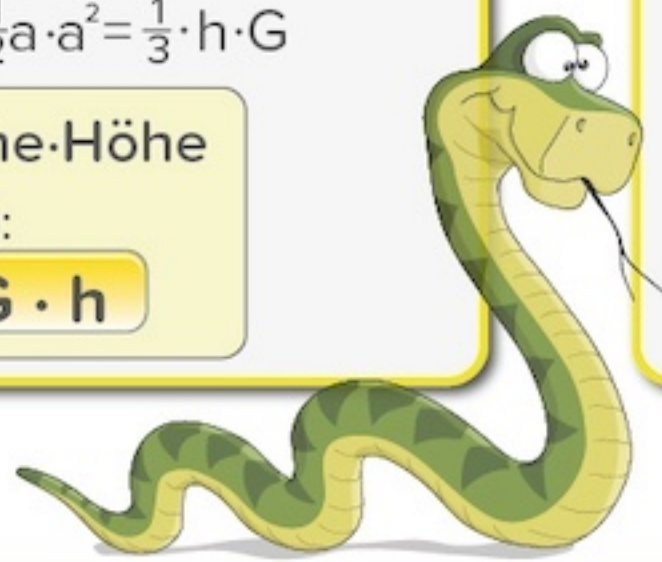
Es passen genau 3 Kegel in einen Zylinder mit dem Radius r und der Höhe h.



⅓·Grundfläche·Höhe

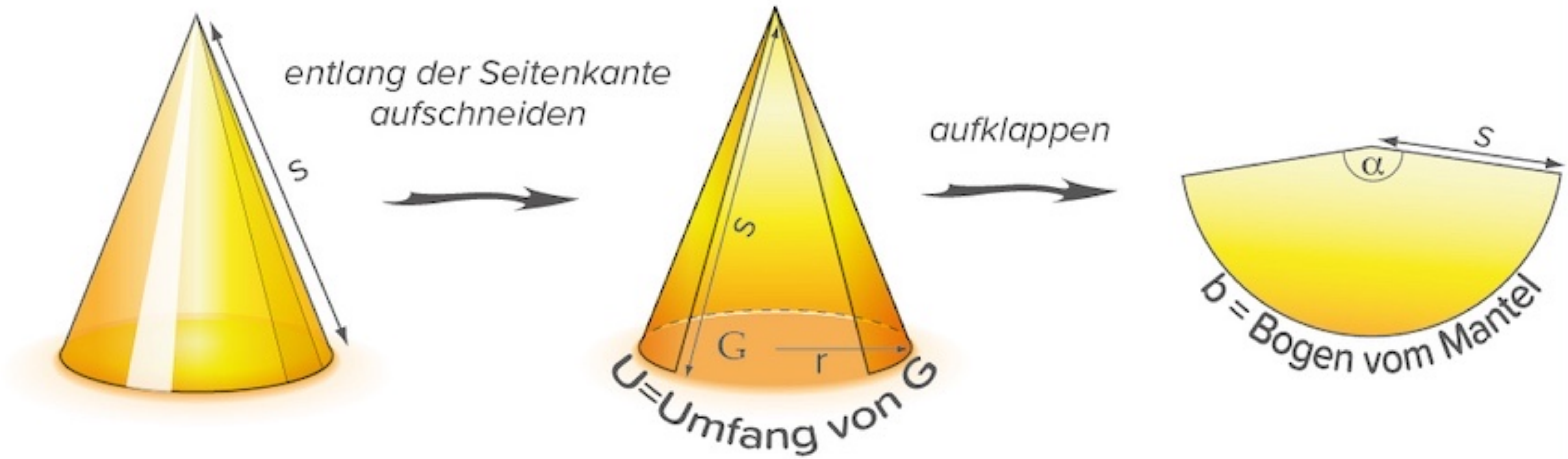
Formel:

$V = ⅓ \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$



Oberfläche vom Kegel

Die Oberfläche vom Kegel setzt sich aus der **Grundfläche** und der **Mantelfläche** zusammen.



Herleitung

Bogen b = Umfang U

$2 \cdot \pi \cdot s \cdot \frac{\alpha}{360°} = 2 \cdot \pi \cdot r$

$\boxed{\frac{\alpha}{360°} = \frac{2\pi r}{2\pi s} = \frac{r}{s}}$

einsetzen

Grundfläche

$G = \pi \cdot r^2$

Mantelfläche

$M = \pi\, s^2 \cdot \boxed{\frac{\alpha}{360°}} =$

$\pi\, s^2 \cdot \boxed{\frac{r}{s}} = \pi \cdot r \cdot s$

O = G + M =

$\pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s =$

Grundfläche + Mantel

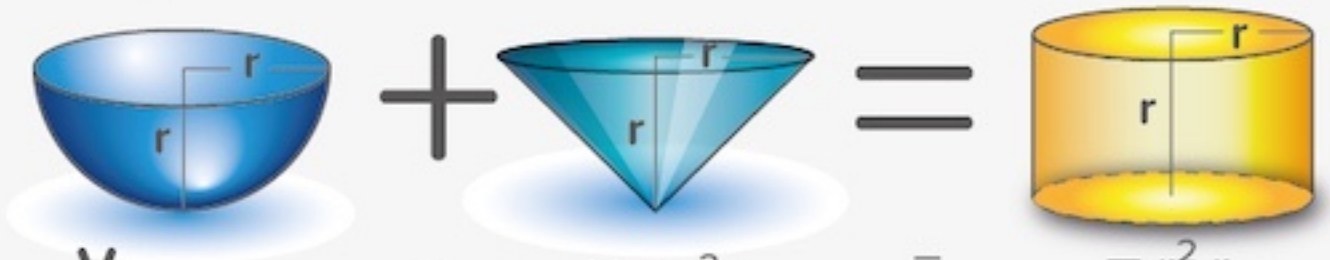
Formel:

$\boxed{\mathbf{O = \pi \cdot r \cdot (r + s)}}$

6 Kugelvolumen & Oberfläche

Volumen

Bereits Archimedes entdeckte, dass der Inhalt einer mit Wasser gefüllten Halbkugel und eines Kegels genau in einen Zylinder passt, wobei der Radius und die Höhe jeweils identisch sein müssen.



$$V_{Halbkugel} + \tfrac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot r = \pi \cdot r^2 \cdot r$$

$$V_{Halbkugel} = \tfrac{2}{3}\pi \cdot r \longrightarrow \boxed{V_{Kugel} = \tfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}$$

Oberfläche

Um eine Formel für den Oberflächeninhalt einer Kugel zu finden, zerlegt man sie in viele kleine Körper. Diese haben ungefähr Pyramidenform, deren Spitzen sich im Kugelmittelpunkt treffen. Damit haben alle Pyramiden als Höhe den Radius r und eine Grundfläche G.

$$V_{Kugel} = \tfrac{1}{3} \cdot G_1 \cdot r + \tfrac{1}{3} \cdot G_2 \cdot r + \ldots + \tfrac{1}{3} \cdot G_n \cdot r$$

$$\tfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \tfrac{1}{3} \cdot r \cdot (G_1 + G_2 + \ldots + G_n)$$

$$\tfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \tfrac{1}{3} \cdot r \cdot \text{gesamte Oberfläche} \longrightarrow \boxed{O_{Kugel} = 4 \cdot \pi \cdot r^2}$$