ÜBERSICHT

Reelle Zahlen

1 Quadrieren / Wurzelziehen

2 $\sqrt{2}$ ist eine reelle Zahl

3 Teilweise Wurzelziehen

4 Wurzeln multiplizieren & dividieren

5 Wurzeln addieren & subtrahieren

6 kürzen & erweitern

$+$ $-$

$$a\sqrt{x} + b\sqrt{x} = (a+b)\cdot\sqrt{x}$$

$$\sqrt{72}+\sqrt{50} = 6\sqrt{2}+5\sqrt{2}=11\sqrt{2}$$

$\cdot$

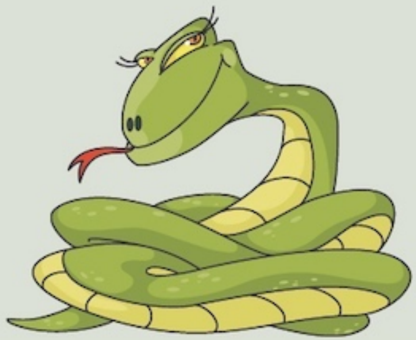
$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$$

$:$

$$\sqrt{a}:\sqrt{b} = \sqrt{a:b}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$



Quadrieren / Wurzelziehen

Wurzelziehen ist die Umkehrung vom Quadrieren.

QUADRIEREN

$$x \xrightarrow{\quad\quad} x^2$$
$$x \xleftarrow{\quad\quad} x^2$$

WURZELZIEHEN

QUADRIEREN

x	x^2
5	$5^2 = 25$
1	$1^2 = 1$
9	$9^2 = 81$
-4	$(-4)^2 = 16$

QUADRATZAHL

WURZELZIEHEN

x^2	x
36	$\sqrt{36} = 6$
1	$\sqrt{1} = 1$
9	$\sqrt{9} = 3$
-4	$\sqrt{-4}$ ϟ

WURZEL

Definition

Die Wurzel aus 36 ist 6, da 6 diejenige **positive** Zahl ist, die mit sich selbst multipliziert 36 ergibt.

$\sqrt{\boxed{36}} = 6$

Radikant

Merke

Die Wurzel aus einer Zahl ist immer positiv.
Man kann nur aus einer positiven Zahl die Wurzel ziehen.

2 $\sqrt{2}$ ist eine reelle Zahl

Reelle Zahlen

Beweis nach Euklid

Annahme: $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl

- Für $\sqrt{2}$ gibt es einen gekürzten Bruch
- $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ p und q sind teilerfremd
- $\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$
- $2 = \frac{p^2}{q^2} = \frac{p \cdot p}{q \cdot q}$ ϟ WIDERSPRUCH

Dieser Bruch kann nicht 2 sein, weil p und q teilerfremd sind und durchs Quadrieren kein Teiler hinzukommen kann.
Um 2 zu bekommen, muss aber der Bruch kürzbar sein, z.B. $\frac{20}{10}$

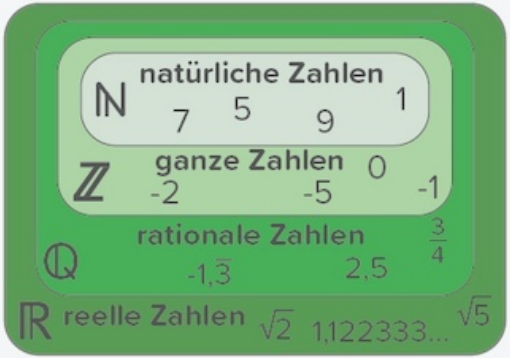
- $\sqrt{2}$ ist **keine rationale Zahl**

Die reellen Zahlen

$\sqrt{2} = 1,414213562...$

- ist eine **irrationale** Zahl
- hat unendlich viele Nachkommastellen und keine Periode
- kann nur mithilfe einer Intervallschachtelung eingegrenzt werden

$[1,414 < \sqrt{2} < 1,415]$ Intervall 0,001



Rezept

teilweise Wurzelziehen

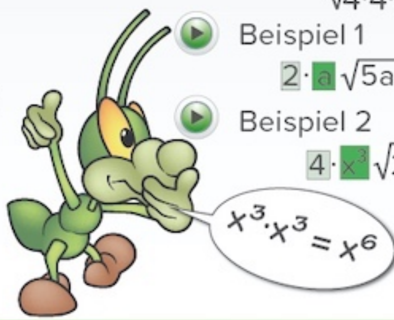
Steht unter der Wurzel ein quadratischer Faktor, so kann man diesen nach Wurzelziehen vor die Wurzel bringen.

- Zerlege in quadr. Faktoren
  $\sqrt{108} = \sqrt{9 \cdot 12} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3}$
- Ziehe die Wurzel
  $\sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3} = 3 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$
- Beispiel 1
  $\sqrt{18 \cdot a^5} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot a^4 \cdot a} = 3 \cdot a^2\sqrt{2 \cdot a}$
- Beispiel 2
  $\sqrt{27 \cdot x^6} = \sqrt{9 \cdot 3 \cdot x^6} =$
  $3 \cdot x^3\sqrt{3}$

als 1 Term schreiben

Steht vor der Wurzel ein Faktor, so kann man diesen durch Quadrieren unter die Wurzel schreiben.

- Quadriere den Faktor und schreibe unter die Wurzel
  $4\sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 3}$
- multipliziere die Faktoren
  $\sqrt{4 \cdot 4 \cdot 3} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{48}$
- Beispiel 1
  $2 \cdot a\sqrt{5a} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot 5a} = \sqrt{20 \cdot a^3}$
- Beispiel 2
  $4 \cdot x^3\sqrt{2x} = \sqrt{16 \cdot x^6 \cdot 2x} = \sqrt{32x^7}$



Multiplikation

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

Werden Wurzeln multipliziert, so kann man sie als Faktoren unter einer Wurzel schreiben und dann multiplizieren.

Beispiele

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{3x} \cdot \sqrt{6x^2} = \sqrt{3x \cdot 6x^2} = \sqrt{18x^3}$$

Division

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a:b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Werden Wurzeln dividiert, so kann man sie als Bruch unter einer Wurzel schreiben.

Beispiele

$$\sqrt{75} : \sqrt{3} = \sqrt{75:3} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{\frac{14}{30}} : \sqrt{\frac{35}{12}} = \sqrt{\frac{14 \cdot 35}{30 \cdot 12}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 6}} = \frac{7}{6}$$

gaanz wichtig

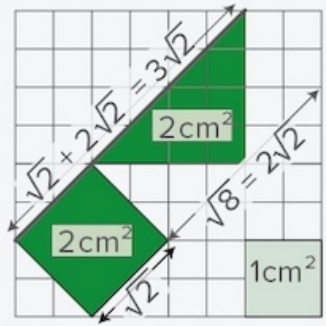
Diese Regel **gilt nicht** für $+$ und $-$!!

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3+4 \neq \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Addition/Subtraktion

$$a\cdot\sqrt{x} + b\cdot\sqrt{x} = (a+b)\cdot\sqrt{x}$$

Man kann nur gleiche Wurzeln addieren/-subtrahieren.
Durch Ausklammern kann die Anzahl der gleichen Wurzeln bestimmt werden.



Beispiele

Distributivgesetz

$$\sqrt{2}\cdot(\sqrt{8}+\sqrt{7}) = \sqrt{2\cdot 8}+\sqrt{2\cdot 7} = 4+\sqrt{14}$$

teilweise Wurzelziehen

$$\sqrt{72}+\sqrt{12}-\sqrt{50} =$$

$$6\cdot\sqrt{\boxed{2}}+2\cdot\sqrt{3}-5\cdot\sqrt{\boxed{2}} = \sqrt{\boxed{2}}+2\cdot\sqrt{3}$$

gleich

gleich

$$\boxed{2}\sqrt{3} + \boxed{4}\sqrt{5} \boxed{-4}\sqrt{3} + \boxed{2}\sqrt{5} = \boxed{-2}\sqrt{3} + \boxed{6}\sqrt{5}$$

gleich

Reelle Zahlen

Wurzeln kürzen

Einen Bruch zu kürzen heißt, den **Zähler und Nenner** durch die gleiche Zahl zu **dividieren**.

$$\frac{12}{18} \overset{6}{=} \frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{12}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3\cdot 4}}{\sqrt{3\cdot 2}} = \frac{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{4})}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} \overset{\sqrt{3}}{=} \frac{1+2}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Wurzeln erweitern

Einen Bruch zu erweitern heißt, den **Zähler und Nenner** mit der gleichen Zahl zu **multiplizieren**.

$$\frac{3}{5} \overset{6}{=} \frac{3\cdot 6}{5\cdot 6} = \frac{18}{30}$$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \overset{\sqrt{2}}{=} \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2\cdot 2}+\sqrt{3\cdot 2}}{\sqrt{8\cdot 2}} = \frac{2+\sqrt{6}}{4}$$

Nenner rational machen

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{\sqrt{5}} \overset{\sqrt{5}}{=} \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{10})\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2\cdot 5}+\sqrt{10\cdot 5}}{\sqrt{5\cdot 5}} = \frac{\sqrt{10}+5\sqrt{2}}{5}$$