

ÜBERSICHT

Exponentielles Wachstum

1 Lineares & Exponentielles Wachstum

2 Formel für

exponentielle Zunahme

3 Formel für exponentielle Abnahme

4 Logarithmus: Exponenten gesucht

Logarithmus

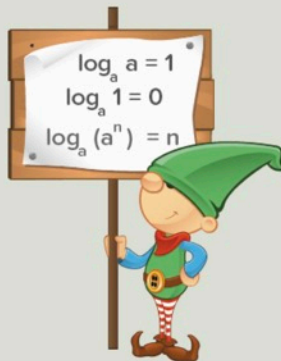
$$a^x = b \longleftrightarrow \log_a b = x$$

Exponent x Basis a

Wachstumsformel

$$a \cdot q^x = y$$

Startwert a Zeitintervalle x Endwert y Zu- Abnahmefaktor $q = \left(\frac{100 \pm p\%}{100} \right)$ Zu- Abnahme in %



Lineares Wachstum

pro Zeitintervall wird ein bestimmter Wert hinzugezählt

- ▶ eine Kerze brennt stündlich um 2cm ab
- ▶ die Handykosten vermehren sich pro Stunde um 3,50€

Beispiele

Exponentielles Wachstum

pro Zeitintervall wird der aktuelle Wert vervielfacht bzw. um einen prozentualen Anteil vermehrt

- ▶ 12 Seerosen verdoppeln sich täglich
- ▶ pro Jahr verliert ein Auto 20% seines aktuellen Wertes

Tina erhält jährlich 5% Zinsen. Wie hoch ist ihr Kapital von 1500€ in 6 Jahren, wenn die Zinsen nicht mit verzinst werden?

Aufgabe

Tina erhält jährlich 5% mehr Taschengeld. Jetzt bekommt sie pro Monat 40€. Wie hoch ist ihr Taschengeld in 3 Jahren?

5% von 1500€ = $\frac{5}{100} \cdot 1500 = 75\text{€}$ pro Jahr
 6 · 75€ = 450€ für 6 Jahre
 Kapital in 6 Jahren: 1500€ + 450€ = 1950€

1	2	3	4	5	6
1575	1650	1725	1800	1875	1950

+75€ pro Jahr

← NEUES Taschengeld →	
ALTES Taschengeld 40€	2€
100%	5%

105% von 40€ = $\frac{105}{100} \cdot 40 = 42\text{€}$

0	1	2	3
40	42	44,10	46,31

· 1,05 pro Jahr

2

Formel für exponentielle Zunahme

Wachstumsformel

$$a \cdot q^x = y$$

Startwert \leftarrow a \rightarrow Endwert y \leftarrow Zunahme in % \rightarrow $q = \frac{100 + p\%}{100}$

x \rightarrow Zeitintervalle \rightarrow q \rightarrow Zunahmefaktor



Aufgabe

Tina legt 1500€ für 3 Jahre bei einem Zinssatz von 5% an.
Wie hoch ist ihr Kapital nach den 3 Jahren, wenn die Zinsen mit verzinst werden?

← NEUES Kapital +105% →

Jahr 1	Ausgangskapital 1500€ 100%	75€ 5%
--------	-------------------------------	-----------

$$K_1 = 105\% \text{ von } 1500\text{€} = 1,05 \cdot 1500 = 1575\text{€}$$

Zinsen

Jahr 2	Altes Kapital 1575€ 100%	78€ 5%
--------	-----------------------------	-----------

$$K_2 = 105\% \text{ von } 1575\text{€} = 1,05 \cdot 1575 = 1653,75\text{€}$$

Zinsen

Jahr 3	Altes Kapital 1653,75€ 100%	83€ 5%
--------	--------------------------------	-----------

$$K_3 = 105\% \text{ von } 1653,75\text{€} = 1,05 \cdot 1653,75 = 1736,44\text{€}$$

$$= 1500 \cdot 1,05 \cdot 1,05 \cdot 1,05 = 1736,44\text{€}$$

$$K_3 = 1500 \cdot 1,05^3$$

Formel für exponentielle Abnahme

Abnahmeformel

$$a \cdot q^x = y$$

Startwert \leftarrow a \rightarrow Endwert y
 Zeitintervalle x
 Abnahmefaktor $q = \frac{100 - p\%}{100}$

Zunahme in % \rightarrow $p\%$

**Aufgabe**

Ein Computer hat einen Neupreis von 1500€. Pro Jahr verliert er 15% seines aktuellen Wertes. Wie viel ist er nach 3 Jahren noch wert?

← Aktueller Wert \rightarrow 100% →

Jahr 1	Neuer Wert 1275€	225€
	85%	15%

$$W_1 = 85\% \text{ von } 1500\text{€} = 0,85 \cdot 1500 = 1275\text{€}$$

Verlust

Jahr 2	Neuer Wert 1084€	191€
	85%	15%

$$W_2 = 85\% \text{ von } 1084\text{€} = 0,85 \cdot 1084 = 921\text{€}$$

Verlust

Jahr 3	Neuer Wert 921€	157€
	85%	15%

$$W_3 = 85\% \text{ von } 1084\text{€} = 0,85 \cdot 1084 = 921\text{€}$$

$$= 1500 \cdot 0,85 \cdot 0,85 \cdot 0,85 = 921,19\text{€}$$

$$W_3 = 1500 \cdot 0,85^3$$

4 Logarithmus: Exponenten gesucht

Logarithmus ist eine Schreibweise für (gesuchte) Exponenten:

Logarithmus

$$a^x = b \longleftrightarrow \log_a b = x$$

Exponent x
Basis a

allgemein mit $a > 0$,
 $a \neq 1$ und $b > 0$

Beispiele

$$2^3 = 8 \longleftrightarrow \log_2 8 = 3$$

spricht:
der Logarithmus von 8 zur Basis 2 ist 3

$$5^x = 25 \longrightarrow x = 2 = \log_5 25$$

Logarithmusgleichung



Zehnerlogarithmus

$$\log_{10} 1000 = \lg 1000 = 3$$

allgemeingültige Logarithmen

1 $\log_a a = 1$, da $a^1 = a$

3 $\log_a (a^n) = n$, da $a^n = (a^n)$

4 $\log_a \left(\frac{1}{a^n}\right) = -n$, da $a^{-n} = \left(\frac{1}{a^n}\right)$

2 $\log_a 1 = 0$, da $a^0 = 1$

5 $\log_a \sqrt{a} = \frac{1}{2}$, da $a^{1/2} = \sqrt{a}$

siehe
Potenzen

